relations entre coefficients et racines de polynômes du troisième degré

1°) <u>questions de cours</u>

On considère un polynôme P quelconque à coefficients réels de degré strictement positif.

a°) α étant un nombre réel quelconque, donner, sans preuve,
une condition nécessaire et suffisante pour que α soit une racine de P.

b°) En déduire le nombre maximal de racines réelles que peut présenter ce polynôme P.

2°) <u>application</u>

On suppose dans toute la suite de l'étude que, pour tout nombre réel X,
$P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ où a, b et c sont trois nombres réels fixés
et que ce polynôme P admet trois racines distinctes réelles notées α, β et γ.

c°) Prouver les relations suivantes : $\alpha + \beta + \gamma = -a$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b$ et $\alpha\beta\gamma = -c$;
en déduire que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a^2 - 2b$ (indication : développer $[\alpha + \beta + \gamma]^2$).

On suppose, dans toute la suite de l'étude, que, pour tout nombre réel X, $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

d°) Prouver que ce polynôme P a trois racines distinctes réelles ; les expliciter.

e°) Résoudre alors le système de trois équations suivant d'inconnu le triplet de nombres réels $(x\,, y\,, z)$.

$$\left\{\begin{matrix} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ xyz = 6 \end{matrix}\right\}$$