correction d'exercices

1°) résolution d'équations du carrée

a°) $x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 10^2 = 0 \xLeftrightarrow{\text{troisième identité remarquable}} [x-10][x+10] = 0$ et comme un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins un des facteurs est nul, on en déduit donc que $x^2 = 100 \Leftrightarrow [x - 10 = 0$ ou $x + 10 = 0] \Leftrightarrow [x = 10 = 0$ ou $x = -10]$; l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de cette équation est donc $\mathcal{S} = \{-10\,, 10\}$.

b°) $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$; l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de cette équation est donc $\mathcal{S} = \{0\}$.

c°) Le carré d'un nombre réel n'est jamais strictement négatif, donc l'équation d'inconnu le nombre réel x $x^2 = -100$ n'a pas de solution ; l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de cette équation est donc vide : $\mathcal{S} = \emptyset$.

2°) l'astuce du 1

2° 1°) approche avec un exemple

d°) Pour $x = -4$, $A = [-4+4][-4-3] + [-4+4][-4-1] + [-4] + 4 = 0 \times [-7] + 0 \times [-5] + 0 = 0 + 0 + 0 = 0$ et $B = [-4+4][2 \times [-4] - 4] = 0 \times [-12] = 0$. On a ainsi, pour $x = -4$, $A = B$, mais on ne peut pas en déduire que cela est le cas pour les autres valeurs de x…

e°) Lorsque $x = 0$, $A = [0+4][0-3] + [0+4][0-1] + 0 + 4 = 4 \times [-3] + 4 \times [-1] + 4 = -12 - 4 + 4 = -12$ et $B = [0+4][2 \times 0 - 4] = 4 \times [-4] = -16$; on en déduit que ces deux expressions A et B ne sont pas toujours égales !

f°) $\forall x \in \mathbb{R}, A = [x+4][x-3] + [x+4][x-1] + [x+4] \times 1$
$= [x+4][x - 3 + x - 1 + 1] = [x+4][2x-3]$.

2° 2°) application

g°) $\forall x \in \mathbb{R}, C = [2x-1][x+3] + 2x - 1 = [2x-1][x+3] + [2x-1] \times 1$
$= [2x-1][x+3+1] = [2x-1][x+4]$ et $D = [x+1]^2 + [x+1][x-1] + x + 1$
$= [x+1]^2 + [x+1][x-1] + [x+1] \times 1 = [x+1][x+1+x-1+1] = [x+1][2x+1]$.

h°) $\forall x \in \mathbb{R}, [x+6]^2 + x + 6 = [x+6][x+6] + [x+6] \times 1 = [x+6][x+6+1] = [x+6][x+7]$.

3°) l'astuce du -1

3° 1°) approche avec un exemple

i°) $\forall x \in \mathbb{R}, E = [2x-1][x+2] - 2x + 1 = [2x-1][x+2] + [-1][2x-1]$

j°) $\forall x \in \mathbb{R}, E = [2x-1]\big[x + 2 + [-1]\big] = [2x-1][x+2-1] = [2x-1][x+1]$.

3° 2°) application

k°) $\forall x \in \mathbb{R}, F = [x-2][x+1] - x + 2 = [x-2][x+1] + [-1][x-2] = [x-2]\big[x+1+[-1]\big]$
$= [x-2][x+1-1] = [x-2]x$ et, $\forall x \in \mathbb{R}, G = [x-3]^2 - x + 3 = [x-3][x-3] + [-1][x-3]$
$= [x-3]\big[x-3+[-1]\big] = [x-3][x-3-1] = [x-3][x-4]$.

4°) <u>développements et factorisations</u>

l°) développement maximal : $x[x+2] + 3x = x \times x + x \times 2 + 3x = x^2 + 2x + 3x = x^2 + 5x$

factorisation maximale : $x[x+2] + 3x = x \times [x+2+3] = x[x+5]$

m°) développement maximal : $t^2 + t[t-1] = t^2 + t^2 - t = 2t^2 - t$

factorisation maximale : $t^2 + t[t-1] = t \times t + t \times [t-1] = t[t+t-1] = t[2t-1]$

n°) développement maximal :

$$[x+2][x-1] + 2[x-1] = x \times x + x \times [-1] + 2 \times x + 2 \times [-1] + 2 \times x + 2 \times [-1]$$
$$= x^2 - x + 2x - 2 + 2x - 2 = x^2 + 3x - 4$$

factorisation maximale : $[x+2][x-1] + 2[x-1] = [x-1] \times [x+2+2] = [x-1][x+4]$

o°) développement maximal :

$$[y+3][y-2] - [y-2][2y+1] = y^2 + y \times [-2] + 3y + 3 \times [-2] - [2y^2 + y - 4y - 2]$$
$$= y^2 - 2y + 3y - 6 - 2y^2 - y + 4y + 2 = -y^2 + 4y - 4[x+3]^2 - [x+1][x+3]$$

factorisation maximale : $[y+3][y-2] - [y-2][2y+1] = [y-2]\big[y+3-[2y+1]\big]$
$= [y-2][y+3-2y-1] = [y-2][-y+2]$

p°) développement maximal :

$$[x+3]^2 - [x+1][x+3] = [x+3][x+3] - [x+1][x+3]$$
$$= x^2 + 3x + 3x + 9 - [x^2 + x + 3x + 3] = x^2 + 6x + 9 - x^2 - 4x - 3 = 2x + 6$$

factorisation maximale : $[x+3]^2 - [x+1][x+3] = 2x + 6 = 2 \times x + 2 \times 3 = 2[x+3]$

q°) développement maximal :

$$[r+4][s-1] - [s-3][r+4] = rs - r + 4s - 4 - [sr + 4s - 3r - 12]$$
$$= \cancel{rs} - r + \cancel{4s} - 4 - \cancel{sr} - \cancel{4s} + 3r + 12 = 2r + 8$$

factorisation maximale : $[r+4][s-1] - [s-3][r+4] = 2r + 8 = 2[r+4]$

r°) développement maximal : $2x[x+3] + x[x+3][x+2] = 2x^2 + 6x + x[x^2 + 5x + 6]$
$= 2x^2 + 6x + x^3 + 5x^2 + 6x = x^3 + 7x^2 + 12x$

factorisation maximale : $2x[x+3] + x[x+3][x+2] = x[x+3][2+x+2] = x[x+3][x+4]$

s°) développement maximal :

$$[x+y][x-y] + [x+y]^2 + x + y = x^2 - \cancel{xy} + \cancel{yx} - \cancel{y^2} + x^2 + 2xy + \cancel{y^2} + x + y = 2x^2 + 2xy + x + y$$

factorisation maximale :

$$[x+y][x-y] + [x+y]^2 + x + y = [x+y][x-y+x+y+1] = [x+y][2x+1]$$