cours — résolution d'équations du deuxième degré

déf. : Une **équation du deuxième degré** est une équation équivalente à la recherche de racines d'une fonction polynôme du deuxième degré.

ex. : Les équations d'inconnu le nombre réel x suivantes sont des équations du deuxième degré.

$2x^2+3x+1=0$ $\quad x^2=x+1$ $\quad x^2+12x+20=2-x^2$ $\quad x^3=[x+1]^3$

contre-ex. : Les équations d'inconnu le nombre réel x suivantes ne sont pas des équations du deuxième degré.

$2x^3=[x+1]^3$ $\quad \sqrt{x}=x-1$

déf. : Considérant ax^2+bx+c, trinôme de x, la quantité b^2-4ac s'appelle son **discriminant**.

rq. : On définit de manière analogue le discriminant d'une fonction polynôme du deuxième degré.

notation : Un discriminant est très souvent désigné par la lettre grecque Δ (se prononce « delta »).

ex. : Le discriminant de $2x^2+3x+1$, trinôme de x, vaut $\Delta=3^2-4\times2\times1=1$.

théo. : On considère l'équation du deuxième degré $ax^2+bx+c=0$ d'inconnu le nombre réel x ; a, b et c sont trois nombres réels avec $a\neq0$. Avec $\Delta=b^2-4ac$, le nombre de solution(s) de cette dernière équation dépend de la valeur de Δ. Plus précisément :

- si $\Delta>0$, alors cette équation a **deux solutions distinctes**, réelles, x_- et x_+ vérifiant ces relations.

$$x_-=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_+=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta=0$, alors cette équation n'a qu'**une seule solution** x_S, qui est réelle, verifiant $x_S=-\frac{b}{2a}$.
- si $\Delta<0$, alors cette équation n'a **pas de solution réelle**.

rq. : x_S n'est rien d'autre que la moyenne arithmétique de x_- et de x_+.

rq. : Les formules donnant x_- et x_+ donnent x_S lorsque $\Delta=0$.

preuve : On isole l'inconnu en regroupant à l'aide d'identités remarquables : $ax^2+bx+c=0$

$$\overset{a\neq0}{\Longleftrightarrow} x^2+2\frac{b}{2a}x+\left[\frac{b}{2a}\right]^2-\left[\frac{b}{2a}\right]^2+\frac{c}{a}=0 \xLeftrightarrow{\text{première identité remarquable}} \left[x+\frac{b}{2a}\right]^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}=0$$

$\Leftrightarrow [x-x_S]^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$ avec $x_S=-\frac{b}{2a}$. Dès lors, on distingue trois cas :

- pour $\Delta<0$, $-\frac{\Delta}{4a^2}$ est donc un nombre réel strictement positif et il est donc impossible d'obtenir 0 en y ajoutant la quantité $[x-x_S]^2$ qui est positive (le carré d'un nombre réel est toujours positif) ; il n'y a donc, dans ce cas-là, aucune solution réelle.
- pour $\Delta=0$, on a donc $[x-x_S]^2=0$ qui n'a que pour unique solution $x=x_S=-\frac{b}{2a}$.
- pour $\Delta>0$, on a donc $\frac{\Delta}{4a^2}>0$ et Δ admet donc une racine carrée ; on a donc $\frac{\Delta}{4a^2}=\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]^2$. On a donc $[x-x_S]^2-\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]^2=0$, donc (troisième identité remarquable) $\left[x-x_S+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x-x_S-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]=0$. Comme un produit de facteurs est nul si, et seulement si au moins un des facteurs est nul, on en déduit bien que cette équation a deux solutions : $x_S-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=x_-$ et $x_S+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=x_+$.

ex. : Le discriminant Δ de $2x^2+3x+1$, trinôme de x, vaut 1, donc $\Delta>0$; l'équation $2x^2+3x+1=0$ d'inconnu le nombre réel x a donc pour ensemble solution $\mathcal{S}=\{x_-,x_+\}$ avec $x_-=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\overset{\text{ici}}{=}\frac{-3-\sqrt{1}}{2\times2}=-1$ et $x_-=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\overset{\text{ici}}{=}\frac{-3+\sqrt{1}}{2\times2}=-0.5$; on a effectivement bien $2\times[-1]^2+3\times[-1]+1=0$ et $2\times[-0.5]^2+3\times[-0.5]+1=0$.