kit de survie
résolution d'équations du deuxième degré

1°) première étape

On s'assure déjà qu'on a bien affaire à une équation du deuxième degré, c'est-à-dire si l'équation à laquelle on s'intéresse est équivalente à la recherche de racines d'une fonction polynôme du deuxième degré, c'est-à-dire à une équation pouvant s'écrire $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des nombres fixés et où a est différent de 0.

ex. : $x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$; l'équation $x^2 = x + 1$ d'inconnu le nombre réel x est ainsi bien une équation du deuxième degré (ici, $a = 1$, $b = -1$ et $c = -1$).

ex. : $x^2 + 12x + 20 = 2 - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 12x + 18 = 0$; l'équation $x^2 + 12x + 20 = 2 - x^2$ d'inconnu le nombre réel x est ainsi bien aussi une équation du deuxième degré (ici, $a = 2$, $b = 12$ et $c = 18$).

ex. : $x^3 = [x+1]^3 \Leftrightarrow x^3 = [x+1][x+1]^2 \Leftrightarrow x^3 = [x+1][x^2 + 2x + 1]$
$\Leftrightarrow \cancel{x^3} = \cancel{x^3} + 2x^2 + x + x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow 3x^2 + 3x + 1 = 0$; l'équation $x^3 = [x+1]^3$ d'inconnu le nombre réel x est ainsi bien aussi une équation du deuxième degré (ici, $a = 3$, $b = 3$ et $c = 1$).

contre-ex. : L'équation $2x + 1 = 0$ d'inconnu le nombre réel x est une équation du premier degré (ici, $a = 0$).

2°) deuxième étape

On calcule le discriminant de la fonction polynôme du deuxième degré dont on cherche donc les racines.

ex. : Le discriminant de $x^2 - x - 1$, trinôme de x, vaut $\Delta = [-1]^2 - 4 \times 1 \times [-1] = 1 + 4 = 5$.

ex. : Le discriminant de $2x^2 + 12x + 18$, trinôme de x, vaut $\Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$.

ex. : Le discriminant de $3x^2 + 3x + 1$, trinôme de x, vaut $\Delta = 3^2 - 4 \times 3 \times 1 = 9 - 12 = -3$.

3°) troisième étape

On détermine, selon la valeur du discriminant calculé, le nombre de solutions de l'équation à laquelle on s'intéresse ; on calcule alors cette (ces) solution(s) s'il y en a et on conclut en indiquant son ensemble solution.

ex. : $x^2 - x - 1$, trinôme de x, de discriminant strictement positif (égal à 5), a ainsi deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \overset{\text{ici}}{=} \frac{-[-1]-\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_+ = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \overset{\text{ici}}{=} \frac{-[-1]+\sqrt{5}}{2\times1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (il s'agit du nombre d'or) ; l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation $x^2 = x + 1$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

ex. : $2x^2 + 12x + 18$, trinôme de x, de discriminant strictement nul, n'a ainsi qu'une seule racine qui est réelle : $x_S = -\frac{b}{2a} \overset{\text{ici}}{=} -\frac{12}{2\times2} = -3$; l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation $x^2 + 12x + 20 = 2 - x^2$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} = \{-3\}$.

ex. : $3x^2 + 3x + 1$, trinôme de x, de discriminant strictement négatif (égal à -3), n'a ainsi aucune racine réelle ; l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation $x^3 = [x+1]^3$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

4°) quatrième étape (facultative, mais à ne pas négliger…)

Comme dans toute résolution d'équation, on vérifie (si le temps le permet…)
que la (les) solution(s) trouvée(s) vérifie(nt) bien l'équation qu'on cherche à résoudre…