correction d'exercices

1°) <u>résolution d'équations du deuxième degré</u>

a°) Le discriminant de $50x^2+115x+60$, trinôme de x, est strictement positif ; on a, en effet, $\Delta = 115^2 - 4\times 50\times 60 = 13225 - 12000 = 1225$. Ce dernier trinôme a donc deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-115-\sqrt{1225}}{2\times 50} = \frac{-115-35}{100} = -1.5$ et $x_+ = \frac{-115+\sqrt{1225}}{2\times 50} = \frac{-115+35}{100} = -0.8$. L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation $50x^2+115x+60=0$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} = \{-1.5\,,-0.8\}$.

b°) Les équations d'inconnu le nombre réel x suivantes sont équivalentes : $8x^2 = 8x-2$ et $8x^2-8x+2=0$; on s'intéresse donc à $8x^2-8x+2$, trinôme de x ; son discriminant est nul ; en effet, $\Delta = [-8]^2 - 4\times 8\times 2 = 64-64 = 0$. Ce dernier trinôme n'admet donc qu'une seule racine, qui est réelle : $x_S = -\frac{-8}{2\times 8} = 0.5$. L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation $8x^2 = 8x-2$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} = \{0.5\}$.

c°) De même, puisque $8x^2 = 8x-3 \Leftrightarrow 8x^2-8x+3=0$, on s'intéresse donc à $8x^2-8x+2$, trinôme de x ; son discriminant est strictement négatif ; en effet, $\Delta = [-8]^2 - 4\times 8\times 3 = 64-96 = -32$. Ce dernier trinôme n'admet donc pas de racine réelle ; l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation $8x^2 = 8x-3$ d'inconnu le nombre réel x est donc vide : $\mathcal{S} = \emptyset$.

2°) <u>rasoir d'Ockham</u>

d°) La décomposition en produit de nombres premier de chacun des trois nombres 50, 60 et 115 permet d'identifier leur plus grand commun diviseur : $50 = 2\times 5^2$, $60 = 2\times 3\times 5$ et $115 = 5\times 23$. Le plus grand commun diviseur aux trois nombres 50, 60 et 115 est ainsi 5.

e°) Il s'agit d'exprimer chacun des coefficients par un produit faisant apparaître le plus grand commun diviseur qu'on "simplifie" alors : $50x^2+115x+60=0 \Leftrightarrow 5\times 10x^2 + 5\times 23x + 5\times 12 = 0$ $\Leftrightarrow 5\times[10x^2+23x+12] = 0 \overset{5\neq 0}{\Leftrightarrow} 10x^2+23x+12=0$. Les équation présentée en a° est donc bien équivalente à l'équation $10x^2+23x+12=0$ d'inconnu le nombre réel x.

f°) $10x^2+23x+12$, trinôme de x, a un discriminant strictement positif ; en effet, $\Delta = 23^2 - 4\times 10\times 12 = 529-480 = 49$. Ce trinôme a donc deux racines réelles : $x_- = \frac{-23-\sqrt{49}}{2\times 10}$ $= \frac{-23-7}{20} = -1.5$ et $x_- = \frac{-23+\sqrt{49}}{2\times 10} = \frac{-23+7}{20} = -0.8$. On retrouve bien que les deux équations $50x^2+115x+60=0$ et $10x^2+23x+12=0$ d'inconnu le nombre réel x soint équivalentes puisque ont même ensemble solution $\{-1.5\,,-0.8\}$.

rq. : On aurait tout aussi bien pu appliquer cette stratégie du rasoir d'Ockham à l'équation présentée en b° de la façon suivante : $8x^2 = 8x-2 \Leftrightarrow 8x^2-8x+2=0 \Leftrightarrow 2\times 4x^2 - 2\times 4x + 2\times 1 = 0$ $\Leftrightarrow 2\times[4x^2-4x+1] = 0 \overset{2\neq 0}{\Leftrightarrow} 4x^2-4x+1=0$. On peut alors calculer le discriminant de $4x^2-4x+1$, trinôme de x, mais on peut aussi reconnaître une identité remarquable : $4x^2-4x+1=0$ $\Leftrightarrow [2x]^2 - 2\times 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow [2x-1]^2 = 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow 2x=1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} = 0.5$.

3°) **racines d'un trinôme de coefficients de même signe**

g°) On peut prouver ce résultant en utilisant les formules donnant les racines de fonctions polynôme du deuxième degré.

- S'il n'y a qu'une seule racine réelle, celle-ci est alors donnée par la formule $-\frac{b}{2a}$, ce qui est bien négatif puisque $a > 0 \leq b$ mais pas forcément strictement négatif, et donc nul, puisque b n'est pas forcément non nul ; il se trouve que 0 ne peut être racine de f puisque $f(0) = c$ qui est non nul par hypothèse, donc 0 ne peut pas être racine de f, donc, dans le cas où cette fonction f n'a qu'une seule racine réelle, celle-ci est bien strictement négative (et, par conséquent, b est strictement positif).
- S'il y a deux racines réelles, celles-ci sont alors données par les formules $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ où $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. Avec $a > 0 \leq b$, la racine $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ est ainsi bien strictement négative. Quant à la racine $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, puisque $\sqrt{\Delta} < b$ (car, comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$, deux nombres positifs et leurs carrés sont rangés dans le même ordre strict, et il se trouve que $\sqrt{\Delta}^2 = b^2 - 4ac < b^2$ puisque, par hypothèse, $a > 0 < c$) et donc $-b + \sqrt{\Delta} < 0$, $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ est ainsi aussi strictement négative.

Une manière bien plus efficace de prouver ce résultat est de **raisonner par l'absurde** : on suppose que cette fonction f a une racine positive $x > 0$ et on recherche une contradiction avec (au moins) une hypothèse de départ : si x est positif, alors, comme $a > 0 \leq b$, on en déduit que $ax^2 + bx \geq 0$, donc, puisque $c > 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, ce qui est **contradictoire** avec le fait que x est racine de f où on a donc $ax^2 + bx + c = 0$. Par conséquent, x étant racine de cette fonction f, l'affirmation $x \geq 0$ est fausse, donc l'affirmation $x < 0$ est vraie, donc, si cette fonction f a une racine, celle-ci est alors nécessairement strictement négative.

h°) On peut trouver un contre-exemple en utilisant le principe du rasoir d'Ockham avec un multiple négatif et une fonction polynôme du deuxième degré à coefficients strictement positifs, par exemple, reprenant le trinôme évoqué en section 2°, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $f\ :\ x \longmapsto 10x^2 + 23x + 12$. Cette fonction f a deux racines strictement négatives : -1.5 et -0.8 ; multipliant les coefficients de cette fonction par un nombre quelconque non nul, le trinôme obtenu a toujours -1.5 et -0.8 pour racines, en particulier si ces coefficients ont été multipliés par un nombre strictement négatif, par exemple par -1 : on exhibe ainsi $-10x^2 - 23x - 12$, trinôme de x de coefficients strictement négatifs, ayant pourtant des racines strictement négatives (-1.5 et -0.8). L'affirmation proposée dans l'énoncé est donc fausse.

4°) **discriminant réduit**

i°) Le discriminant de $x^2 + 2\beta x + c$, trinôme de x, vaut $\Delta = [2\beta]^2 - 4 \times 1 \times c = 4\beta^2 - 4c = 4[\beta^2 - c]$

- et est donc strictement positif si, et seulement si, $\beta^2 - c$ est strictement positif.
- et est donc nul si, et seulement si, $\beta^2 - c$ est nul.
- et est donc strictement négatif si, et seulement si, $\beta^2 - c$ est strictement négatif.

La quantité $\beta^2 - c$ joue donc bien le rôle de discriminant.

j°) Cette équation est équivalente à l'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$ d'inconnu le nombre réel x ; le discriminant réduit de $x^2 + 2 \times 2x + 3$, trinôme de x, est strictement positif ; on a, en effet, $\delta = 2^2 - 3 = 1 > 0$). Ce trinôme a donc deux racines distinctes réelles : $x_- = -\beta - \sqrt{\delta} = -2 - \sqrt{1} = -3$ et $x_+ = -\beta + \sqrt{\delta} = -2 + \sqrt{1} = -1$. L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de cette équation est donc $\mathcal{S} = \{-3\,,-1\}$.