différentes expressions de fonctions polynôme du deuxième degré

objectif : exprimer un trinôme sous forme développée, canonique et, s'il y a lieu, factorisée

1°) approche

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante : $f\ :\ x \longmapsto [x+1]^3 + 11 - x[x^2 + x + 13]$.

a°) Développer au maximum et réduire au mieux $f(x)$ en tant d'expression de x ;
en déduire que cette fonction f est bien une fonction polynôme du deuxième degré.

On note alors a son coefficient dominant. La courbe représentative de cette fonction f est donc une parabole ;
on note $(x_S\ ,y_S)$ les coordonnées de son sommet dans un repère orthogonal du plan.

b°) Développer au maximum et réduire au mieux l'expression de x suivante : $a[x - x_S]^2 + y_S$.

c°) Prouver que 0 admet exactement deux antécédents par cette fonction f ;
on note x_- le plus petit de ces deux antécédents et x_+ le plus grand de ces deux antécédents.

d°) Développer au maximum et réduire au mieux l'expression de x suivante : $a[x - x_-][x - x_+]$.

2°) cours

On considère une fonction polynôme du deuxième degré f dont on note
a le coefficient dominant (qui est, par définition, non nul), b la pente à l'origine, c l'ordonnée à l'origine
et $(x_S\ ,y_S)$ les coordonnées du sommet de sa parabole représentative dans un repère orthogonal du plan.

déf. : $ax^2 + bx + c$, en tant qu'expression de x, est la **forme développée** de cette fonction polynôme f.

ex. : $f\ :\ x \longmapsto [x+1]^3 + 11 - x[x^2 + x + 13]$ s'écrit sous forme développée
$f\ :\ x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -10$ et $c = 12$.

déf. : $a[x - x_S]^2 + y_S$, en tant qu'expression de x, est sa **forme canonique**.

ex. : $f\ :\ x \longmapsto [x+1]^3 + 11 - x[x^2 + x + 13]$ s'écrit sous forme canonique
$f\ :\ x \longmapsto a[x - x_S]^2 + y_S$ avec $a = 2$, $x_S = 2.5$ et $y_S = -0.5$.

théo. : Lorsque son discriminant $b^2 - 4ac$, noté Δ, est positif, cette fonction de deuxième degré f peut alors s'écrire sous **forme factorisée** : $f\ :\ x \longmapsto a[x - x_-][x - x_+]$ où $x_- = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_+ = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.

preuve : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a\left[[x - x_S]^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ et, puisque $\Delta \geq 0$, on a donc $\frac{\Delta}{4a^2} = \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]^2$, donc, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = a\left[[x - x_S]^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[[x - x_S]^2 - \left[\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]^2\right] \overset{\text{troisième identité remarquable}}{=} a\left[x - x_S + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[x - x_S + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]$$

$$= a[x - x_-][x - x_+].$$

ex. : La fonction de deuxième degré $f\ :\ x \longmapsto 2x^2 - 10x + 12$ admet un discriminant Δ strictement positif ($\Delta = [-10]^2 - 4 \times 2 \times 12 = 100 - 96 = 4$), donc présente deux racines distinctes qui sont réelles : $x_- = \frac{-[-10]-\sqrt{4}}{2\times 2} = \frac{10-2}{4} = 2$ et $x_+ = \frac{-[-10]+\sqrt{4}}{2\times 2} = \frac{10+2}{4} = 3$; cette fonction f s'écrit donc sous forme factorisée $f\ :\ x \longmapsto a[x - x_-][x - x_+]$ avec $a = 2$, $x_- = 2$ et $x_+ = 3$: $f\ :\ x \longmapsto 2[x-2][x-3]$.

rq. : Si le discriminant Δ vaut 0, alors $x_- = x_+ = x_S$ et $y_S = 0$ et la forme factorisée est la forme canonique ; on dispose en outre du théorème suivant, **admis**.

théo. : La forme développée, la forme canonique et, lorsqu'elle existe, la forme factorisée d'une fonction polynôme du deuxième degré sont **uniques** (à l'ordre des facteurs près pour la forme factorisée).