correction d'exercices

1°) signe d'une fonction polynôme du deuxième degré

a°) Le discriminant de $10x^2 - 23x + 12$, trinôme de x, est strictement positif ; en effet, celui-ci vaut $\Delta = [-23]^2 - 4 \times 10 \times 12 = 529 - 480 = 49$. Cette fonction f admet ainsi deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-[-23]-\sqrt{49}}{2\times10} = \frac{23-7}{20} = \frac{16}{20} = 0.8$ et $x_+ = \frac{-[-23]+\sqrt{49}}{2\times10} = \frac{23+7}{20} = \frac{3}{2} = 1.5$; cette fonction f peut donc bien s'exprimer sous forme factorisée dela façon suivante : $f\ :\ x \longmapsto 10[x-0.8][x-1.5]$.

b°) Le signe de $f(x)$ en fonction de x est donné par le produit des signes de ses facteurs.

x	$-\infty$		0.8		1.5		$+\infty$
$10[x-0.8]$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$x-1.5$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c°) L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $f(x) \geq 0$ d'inconnu le nombre réel x est donc

$$\mathcal{S} =]-\infty\,, 0.8] \cup [1.5\,, +\infty[.$$

2°) vitesse de courant de l'Oise

d°) Le bateau du lycéen avance à une vitesse de $10.8\ \mathrm{km/h} = 10.8 \times \frac{1000\ \mathrm{m}}{3600\ \mathrm{s}} = 10.8 \times \frac{1}{3.6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{10.8}{3.6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3\ \mathrm{m/s}$. Aidé du courant de l'Oise lors de son trajet aller, ce lycéen parcours les $4\ \mathrm{km}$ à une vitesse, en $\mathrm{m/s}$, de $3+v$; le temps qu'il met pour effectuer son trajet aller est donc $\frac{4000}{3+v}$ (en s). Lors de son trajet retour, sa vitesse de déplacement étant diminué de la vitesse du courant de l'Oise, ce lycéen parcours les $4\ \mathrm{km}$ à une vitesse, en $\mathrm{m/s}$, de $3-v$; le temps qu'il met pour effectuer son trajet aller est donc $\frac{4000}{3-v}$ (en s). comme ce lycéen est parvenu à revenir chez lui malgré le courant de l'Oise, la vitesse de son bateau celui-ci est donc strictement supérieure à celle de ce courant ; on a donc $v < 3$, et comme $v > 0$, on a donc $v^2 \neq 9$.

e°) D'après l'énoncé, le temps $\frac{4000}{3-v}$ est égal au temps $\frac{4000}{3+v}$ auquel s'ajoute une durée de $41\ \mathrm{min}$ et $40\ \mathrm{s}$, c'est-à-dire une durée de $2500\ \mathrm{s}$; on a donc $\frac{4000}{3-v} = \frac{4000}{3+v} + 2500$. Comme

$$\frac{4000}{3-v} = \frac{4000}{3+v} + 2500 \Leftrightarrow \frac{1}{3-v} - \frac{1}{3+v} = \frac{2500}{4000} \Leftrightarrow \frac{3+v}{[3-v][3+v]} - \frac{3-v}{[3-v][3+v]} = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{3}+v-\cancel{3}+v}{[3-v][3+v]} = \frac{5}{8} \Leftrightarrow \frac{2v}{9-v^2} = \frac{5}{8} \overset{v^2\neq9}{\Longleftrightarrow} \frac{8}{5}2v = 9 - v^2 \Leftrightarrow v^2 + 3.2v - 9 = 0$$

on en déduit que v est solution de l'équation $x^2 + 3.2x - 9 = 0$ d'inconnu le nombre réel x.

f°) Le discriminant Δ de $x^2 + 3.2x - 9$, trinôme de x, est strictement positif ; en effet, $\Delta = 3.2^2 - 4 \times 1 \times [-9] = 10.24 + 36 = 46.24$. Ce trinôme a donc deux racines distinctes réelles $x_- = \frac{-3.2-\sqrt{46.24}}{2\times1} = \frac{-3.2-6.8}{2} = -5$ et $x_+ = \frac{-3.2+\sqrt{46.24}}{2\times1} = \frac{-3.2+6.8}{2} = 1.8$. L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'équation $x^2 + 3.2x - 9 = 0$ d'inconnu le nombre réel x.est donc $\mathcal{S} = \{-5\,, 1.8\}$. La vitesse du courant de l'Oise devant être positive, on en déduit que celle-ci est de $1.8\ \mathrm{m/s}$, c'est-à-dire de $6.48\ \mathrm{km/h}$.

3°) <u>systèmes d'équation somme produit</u>

g°) Dans le cas où $P = 0$, le produit $x \times y$ vaut donc 0, et comme un produit de facteurs est nul si, et seulement si, au moins un de ces facteurs est nul, on en déduit que soit $x = 0$, soit $y = 0$. Si c'est x qui vaut 0, y vaut alors S ; si c'est y qui vaut 0, x vaut alors S. Finalement, dans le cas où $P = 0$, ce système d'équations a deux solutions : $(0\,,S)$ et $(S\,,0)$; son ensemble solution $\mathcal{S}$ est donc $\mathcal{S} = \{(0\,,S)\,,(S\,,0)\}$.

h°) Comme $P \neq 0$, on a nécessairement $x \neq 0 \neq y$. La première équation du système, multipliant chacun de ses deux membre par x, est donc équivalente à l'équation $x^2 + xy = Sx$ d'inconnu le nombre réel non nul x, c'est-à-dire que ce nombre réel non nul x est solution de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ d'inconnu le nombre réel X ; on obtient le même résultat pour y en multipliant chacun des deux membres de la première équation du système par y au lieu de x. Réciproquement, si x et y sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$ d'inconnu le nombre réel X, cela signifie que $X^2 - SX + P$, trinôme de X, a x et y pour racines et peut donc s'écrire sous forme factorisée tel qu'on ait pour tout nombre réel X, $X^2 - SX + P = [X - x][X - y]$; développant le second membre de cette dernière égalité, il faut donc que, pour tout nombre réel X, $X^2 - SX + P = X^2 - [x + y]X + xy$. Nécessairement, $x + y = S$ et $x \times y = P$.

i°) Il s'agit donc de résoudre l'équation $X^2 - 9X + 14 = 0$ d'inconnu le nombre réel X ; le discriminant Δ de $X^2 - 9X + 14$, trinôme de X, est strictement positif ; on a en effet $\Delta = [-9]^2 - 4 \times 1 \times 14 = 25$. Ce dernier trinôme a donc deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-[-9]-\sqrt{25}}{2\times 1} = \frac{9-5}{2} = 2$ et $x_+ = \frac{-[-9]+\sqrt{25}}{2\times 1}$ $= \frac{9+5}{2} = 7$. L'ensemble solution $\mathcal{S}$ du système d'équations $\begin{Bmatrix} x + y = 9 \\ x \times y = 14 \end{Bmatrix}$ d'inconnu le couple de nombre réels $(x\,,y)$ est donc $\mathcal{S} = \{(2\,,7)\,,(7\,,2)\}$.