signe de fonctions polynôme du deuxième degré

1°) approche

On définit sur $\mathbb{R}$ six fonctions polynômes du deuxième degré f, g, h, j, k et l de la façon suivante.

$f\,:\,x \longmapsto 2x^2+3x+1$ $\qquad$ $h\,:\,x \longmapsto -2x^2+3x+1$ $\qquad$ $k\,:\,x \longmapsto x^2+2x+1$

$g\,:\,x \longmapsto 2x^2+3x+2$ $\qquad$ $j\,:\,x \longmapsto -2x^2+3x-2$ $\qquad$ $l\,:\,x \longmapsto -4x^2-4x-1$

a°) Exprimer chacune d'elles sous forme canonique.

b°) Donner les variations de la fonction carré, puis le tableau de variations de chacune de ces six fonctions.

c°) Faire apparaître dans chacun de ces six tableaux de variations les éventuels antécédents de 0 par la fonction associée.

d°) En déduire le tableau de signes de chacune de ces six fonctions ; généraliser.

2°) cours

théo. : f étant une fonction polynôme du deuxième degré, notant a son coefficient dominant (non nul) et Δ son discriminant, le tableau de signe de f est le tableau correspondant aux valeurs de a et Δ parmi les suivants.

<table>
<tr><th></th><th>$a<0$</th><th>$a>0$</th></tr>
<tr><td>$\Delta>0$</td><td><table><tr><td>x</td><td></td><td>x_+</td><td></td><td>x_-</td><td></td></tr><tr><td>signe de ax^2+bx+c</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td></td><td>x_-</td><td></td><td>x_+</td><td></td></tr><tr><td>signe de ax^2+bx+c</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta=0$</td><td><table><tr><td>x</td><td></td><td>x_S</td><td></td></tr><tr><td>signe de ax^2+bx+c</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td></td><td>x_S</td><td></td></tr><tr><td>signe de ax^2+bx+c</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>$\Delta<0$</td><td><table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>signe de ax^2+bx+c</td><td>$-$</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>signe de ax^2+bx+c</td><td>$+$</td></tr></table></td></tr>
</table>

preuve : On utilise la relation suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2+bx+c = a\left[[x-x_S]^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Trois cas se distinguent.

- Si $\Delta<0$, alors $[x-x_S]^2-\frac{\Delta}{4a^2}$ est toujours strictement positif et donc ax^2+bx+c est toujours du signe de a.
- Si $\Delta=0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2+bx+c = a[x-x_S]^2$ est toujours strictement du signe de a (non nul) hormis pour $x=x_S$ valeur pour laquelle cette expression vaut 0.
- Si $\Delta>0$, on peut écrire le trinôme sous forme factorisée : $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2+bx+c = a[x-x_-][x-x_+]$; le signe du trinôme est ainsi donné par le produit des signes de chacun des trois facteurs a, $x-x_-$ et $x-x_+$.

rq. : On retient que ax^2+bx+c, trinôme de x, est **du signe de a** lorsque x est **en dehors de ses racines**.