correction d'exercices

1°) vers les inéquations du deuxième degré

a°) $x_S = -\frac{7}{2\times[-20]} = \frac{7}{40} = 0.175$ et $y_S = f(x_S) = f\left(\frac{7}{40}\right)$ $= 7 \times \frac{7}{40} - 20 \times \left[\frac{7}{40}\right]^2 + 6 = \frac{49}{80} + \frac{480}{80} = \frac{529}{80} = 6.6125$; on a donc, sous forme canonique, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -20\left[x - \frac{7}{40}\right]^2 + \frac{529}{80}$. Le tableau de variations de cette fonction f est donc le suivant.

x	$-\infty$		0.175		$+\infty$
variations de $f(x)$ avec x	$-\infty$	$\nearrow$	6.6125	$\searrow$	$-\infty$

b°) On commence par déterminer les éventuelles racines de cette fonction polynôme du deuxième degré f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -20\left[x - \frac{7}{40}\right]^2 + \frac{529}{80} = 0 \Leftrightarrow \left[x - \frac{7}{40}\right]^2 = \frac{529}{1600} \Leftrightarrow \left[x - \frac{7}{40} = -\sqrt{\frac{529}{1600}} \text{ ou } x - \frac{7}{40} = \sqrt{\frac{529}{1600}}\right]$ $\Leftrightarrow \left[x = \frac{7}{40} - \frac{23}{40} \text{ ou } x = \frac{7}{40} + \frac{23}{40}\right] \Leftrightarrow \left[x = -\frac{2}{5} \text{ ou } x = \frac{3}{4}\right]$; cette fonction polynôme du deuxième degré a donc deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{3}{4} = 0.75$ et $x_+ = -\frac{2}{5} = -0.4$. Puisque un trinôme est du signe de son coefficient dominant en dehors de ses racines, le tableau de signes de cette fonction polynôme du deuxième degré f est donc le tableau ci-contre.

x	$-\infty$		-0.4		0.75		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

c°) D'après le tableau de signes établi en b°, l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $f(x) \leq 0$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} =]-\infty\,, -0.4] \cup [0.75\,, +\infty[$.

d°) $\forall x \in \mathbb{R}, -20\left[x - \frac{7}{40}\right]^2 \leq 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}, -20[x - 0.175]^2 + 6.6125 \leq 6.6125$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 7$; l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $f(x) \leq 7$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

2°) réalisation de bénéfices

e°) Pour fabriquer quatre éoliennes en un jour, cela coûte à l'entreprise $C(4) = 40[4[4+5] + 100]$ $= 5440$ euros ; en vendant ces quatre éoliennes ce même jour, celle-ci effectue des recettes de 4×1200 $= 4800$ euros ; ainsi, un jour où cette entreprise ne fabrique que quatre éoliennes qu'elle vend ce même jour, cette entreprise ne réalise donc pas de bénéfices, mais des pertes ($5440 - 4800 = 640$ euros de pertes).

Pour fabriquer dix éoliennes en un jour, cela coûte à l'entreprise $C(10) = 40[10[10+5] + 100]$ $= 10000$ euros ; en vendant ces dix éoliennes ce même jour, celle-ci effectue des recettes de 10×1200 $= 12000$ euros ; ainsi, un jour où cette entreprise ne fabrique que dix éoliennes qu'elle vend ce même jour, cette entreprise réalise donc bien des bénéfices ($12000 - 10000 = 2000$ euros de bénéfices).

f°) Les bénéfices sont égaux aux recettes auxquelles sont retranchées les coûts de fabrication. On a donc, $\forall q \in \mathbb{N}, B(q) = 1200q - C(q) = 1200q - 40[q[q+5] + 100] = 1200q - 40[q^2 + 5q + 100]$ $= 1200q - 40q^2 - 200q - 4000 = -40q^2 + 1000q - 4000$l ; cette fonction B est donc bien définie sur $\mathbb{N}$ de la façon suivante : $B :\ q \longmapsto -40q^2 + 1000q - 4000$.

g°) Il s'agit de résoudre l'équation $B(q) = -10000$ d'inconnu le nombre entier naturel q. Puisque $B(q) = -10000 \Leftrightarrow -40q^2 + 1000q + 6000 = 0 \Leftrightarrow q^2 - 25q - 150 = 0$, il s'agit de déterminer les racines de $x^2 - 25x - 150$ trinôme de x : $\Delta = [-25]^2 - 4 \times 1 \times [-150] = 1225 > 0$; ce dernier trinôme a donc deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-[-25]-\sqrt{1225}}{2\times1} = \frac{25-35}{2} = -5$ et $x_+ = \frac{25+35}{2} = 30$. Le nombre d'éoliennes q fabriquées et vendue ce jour-là devant être un nombre entier naturel, donc positif, on en déduit que, ce jour-là, cette entreprise a fabriqué et vendu trente éoliennes.

h°) Pour déterminer le signe de $-40x^2 + 1000x - 4000$, trinôme de x, en fonction de x, on commence à en déterminer ses racines : $\Delta = 1000^2 - 4 \times [-40] \times [-4000] = 1000000 - 640000 = 360000 > 0$, donc ce trinôme a deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-1000-\sqrt{360000}}{2\times[-40]} = \frac{-1000-600}{-80} = 20$ et $x_+ = \frac{-1000+600}{-80} = 5$ Puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant à l'extérieur de ses racines, on en déduit que le tableau de signe de ce trinôme est donc le tableau ci-contre.

x	$-\infty$		5		20		$+\infty$
signe de $-40x^2 + 1000x - 4000$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $B(q) > 0$ d'inconnu le nombre entier q est donc $\mathcal{S} = [6\,,19] \cap \mathbb{N}$. Ce dernier résultat s'interprète de la façon suivante : afin de réaliser des bénéfices un jour donné, cette entreprise a tout intérêt a fabriquer et vendre ce même jour entre 6 et 19 éoliennes (bornes incluses).

i°) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto -40x^2 + 1000x - 4000$ est une fonction polynôme du deuxième degré de coefficient dominant négatif, donc est strictement croissante sur $]-\infty\,, x_S]$ et est strictement décroissante sur l'intervalle $[x_S\,, +\infty[$ où $x_S = -\frac{1000}{2\times[-40]} = 12.5$; le tableau de variations de cette fonction f est donc le tableau ci-contre ; on a bien, en effet, $f(12.5) = -40 \times 12.5^2 + 1000 \times 12.5 - 4000 = -6250 + 12500 - 4000 = 2250$.

x	-∞		12.5		$+\infty$
variations de $f(x)$ avec x			2250		
		↗		↘	
	$-\infty$				$-\infty$

Pour maximiser son bénéfice, cette entreprise a intérêt de fabriquer et de vendre en un jour un nombre d'éolienne le plus "proche" de 12.5, c'est-à-dire 12 ou 13 éoliennes ; préciser le montant, en euros, des bénéfices maximaux alors réalisés est donc de $B(12) = -40 \times 12^2 + 1000 \times 12 - 4000 = 2240$ (on vérifie qu'on a bien aussi $B(13) = -40 \times 13^2 + 1000 \times 13 - 4000 = 2240$).

3°) <u>relation entre coefficients et racines</u>

j°) $\forall x \in \mathbb{R}, a[x - x_-][x - x_+] = a[x^2 - x \times x_+ - x_- \times x + x_- \times x_+] = ax^2 - a[x_- + x_+]x + ax_-x_+$

k°) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 - a[x_- + x_+]x + ax_-x_+$ donne, pour $x = 0$, $c = ax_-x_+$, d'où on en déduit, puisque $a \neq 0$, $x_-x_+ = \frac{c}{a}$, et donne, pour $x = 1$, $a + b + c = a - a[x_- + x_+] + ax_-x_+$, d'où on en déduit $b = -a[x_- + x_+]$, d'où on en déduit, puisque $a \neq 0$, $x_- + x_+ = -\frac{b}{a}$.

l°) $f(5) = 5 \times 5^2 - 26 \times 5 + 5 = 125 - 130 + 5 = 0$.

m°) Disposant d'une racine, on en trouve ainsi une autre à l'aide d'une des deux relations entre coefficients et racines. Par exemple, $x_-x_+ = \frac{c}{a}$ fournit $x_- \times 5 = \frac{5}{5}$, donc $5x_- = 1$; cette autre racine vaut donc $x_- = \frac{1}{5}$. Avec l'autre relation entre coefficients et racines, on a aussi $x_- + 5 = -\frac{-26}{5}$, donc $x_- = \frac{26}{5} - 5 = 0.2 = \frac{1}{5}$.