kit de survie — résolution d'inéquations

1°) <u>première étape</u>

On commence à identifier les valeurs interdites par l'inéquation ;
ces valeurs ne doivent pas appartenir à l'ensemble solution de l'inéquation

ex. : L'inéquation $\frac{4x^6+4x^5+x^4-25}{x^2+x-6} \geq 4$ d'inconnu le nombre réel x a pour valeurs interdites les valeurs de x annulant le dénominateur x^2+x-6 ; résolvant l'équation $x^2+x-6=0$ d'inconnu le nombre réel x, on obtient qu'il y a donc deux valeurs interdites : -3 et 2.

2°) <u>deuxième étape</u>

On "regroupe" tout dans un même membre de l'inéquation.

ex. : Afin de résoudre l'inéquation $\frac{4x^6+4x^5+x^4-25}{x^2+x-6} \geq 4$ d'inconnu le nombre réel x, on résout l'inéquation équivalente, toujours d'inconnu le nombre réel x, suivante : $\frac{4x^6+4x^5+x^4-25}{x^2+x-6} - 4 \geq 0$.

/!\ : On peut être tenté de multiplier membre à membre par un dénominateur de sorte à se ramener à une inéquation sans dénominateur ; cette démarche ne conduit pas à des inéquations équivalentes en général pour la simple et bonne raison que l'ordre des inégalités ne se conserve pas dès lors que le facteur utilisé dans la multiplication membre à membre est négatif.

ex. : Les inéquations d'inconnu le nombre réel x suivantes ne sont pas équivalentes : $\frac{4x^6+4x^5+x^4-25}{x^2+x-6} \geq 4$ et $4x^6+4x^5+x^4-25 \geq 4[x^2+x-6]$; en effet, la première inéquation est vérifiée pour $x=0$, mais pas la seconde.

3°) <u>troisième étape</u>

On factorise au mieux l'expression obtenue dans le membre non nul de l'inéquation.

ex. : $\forall x \in \mathbb{R}-\{-3\,,2\}, \frac{4x^6+4x^5+x^4-25}{x^2+x-6} - 4 = \frac{x^4[4x^2+4x+1]-25}{x^2+x-6} - \frac{4x^2+4x-24}{x^2+x-6} = \frac{x^4[4x^2+4x+1]-4x^2-4x-1}{x^2+x-6}$
$= \frac{x^4[4x^2+4x+1]-[4x^2+4x+1]}{x^2+x-6} = \frac{[x^4-1][4x^2+4x+1]}{x^2+x-6} = \frac{[x^2-1][x^2+1][[2x]^2+2\times 2x+1]}{x^2+x-6} = \frac{[x-1][x+1][x^2+1][2x+1]^2}{[x-2][x+3]}$,
donc les inéquations d'inconnu le nombre réel x $\frac{4x^6+4x^5+x^4-25}{x^2+x-6} \geq 4$ et $\frac{[x-1][x+1][x^2+1][2x+1]^2}{[x-2][x+3]} \geq 0$ sont équivalentes.

4°) <u>quatrième étape</u>

On construit le tableau de signes de l'expression factorisée dans le membre non nul de l'inéquation.

ex. :

x	$-\infty$	-3		-1		-0.5		1		2	$+\infty$
signe de $x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
signe de $x+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
signe de x^2+1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
signe de $[2x+1]^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
signe de $x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
signe de $x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
signe de $\frac{[x-1][x+1][x^2+1][2x+1]^2}{[x-2][x+3]}$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$

5°) <u>cinquième étape</u>

On conclut en lisant l'ensemble solution dans le tableau de signes construit lors de l'étape précédente.

ex. : L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $\frac{4x^6+4x^5+x^4-25}{x^2+x-6} \geq 4$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} =]-\infty\,,-3[\cup [-1\,,1] \cup]2\,,+\infty[$.