correction d'exercices

1°) <u>résolution d'inéquations du deuxième degré</u>

a°) Chacune des deux expressions de x présentées dans l'inéquation n'impose aucune condition sur ce x ; il n'y a pas de valeur interdite. Avec $2x^2 + x > [x-1]^2 \Leftrightarrow 2x^2 + x > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 1 > 0$, résoudre cette inéquation requiert de déterminer le signe de $x^2 + 3x - 1$, trinôme de x ; on commence par la recherche d'éventuelle(s) racine(s) : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times [-1] = 10 > 0$ donc ce trinôme a deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-3-\sqrt{10}}{2} \approx -3.08$ et $x_+ = \frac{-3+\sqrt{10}}{2} \approx -0.08$. Comme un trinôme est du signe de son coefficient dominant en dehors de ses racines, on obtient le tableau de signes ci-contre. Finalement, puisque l'inéquation qu'on cherche à résoudre est équivalente à l'inéquation $x^2 + 3x - 1 > 0$ d'inconnu le nombre réel x, l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de cette première inéquation est donc $\mathcal{S} = \left]-\infty\, , \frac{-3-\sqrt{10}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{10}}{2}\, , +\infty\right[$.

x	$-\infty$		x_-		x_+		$+\infty$
signe de $x^2 + 3x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b°) $x + 6$, expression de x du membre de droite, n'impose aucune condition sur ce x ; cela n'est pas le cas pour l'expression de x du membre de gauche $\frac{x^3}{x^2+x-6}$; en effet, cette dernière expression requiert que le dénominateur $x^2 + x - 6$ ne s'annule pas ; on recherche donc les éventuelle(s) racine(s) de ce trinôme ; qui sont donc valeurs interdites de l'inéquation : $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times [-6] = 25 > 0$, donc ce trinôme a deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times1} = -3$ et $x_+ = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times1} = 2$; chacune de ces deux dernières valeurs ne doit donc pas appartenir à l'ensemble solution de cette inéquation. Puisque $\frac{x^3}{x^2+x-6} \geq x + 6$ $\Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2+x-6} - [x+6] \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^3}{x^2+x-6} - \frac{[x+6][x^2+x-6]}{x^2+x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\cancel{x^3} - \cancel{x^3} - x^2 + \cancel{6x} - 6x^2 - \cancel{6x} + 36}{x^2+x-6} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{36-7x^2}{x^2+x-6} \geq 0$, résoudre cette inéquation requiert de déterminer le signe de $\frac{36-7x^2}{x^2+x-6}$; s'agissant d'un quotient de trinôme, on recherche les éventuelles racines de chacun de ces deux trinôme ; on détermine alors le signe de chacun de ces deux trinômes puis on en déduit le signe de leur quotient. Connaissant déjà les racines de $x^2 + x - 6$, trinôme de x (il s'agit de -3 et de 2), on détermine donc les racines de $36 - 7x^2$, trinôme de x :

$$36 - 7x^2 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{7} \Leftrightarrow \left[x = -\sqrt{\frac{36}{7}} \text{ ou } x = \sqrt{\frac{36}{7}}\right] \Leftrightarrow \left[x = -\frac{6}{\sqrt{7}} \text{ ou } x = \frac{6}{\sqrt{7}}\right] ;$$

les racines de ce dernier trinôme sont donc $-\frac{6}{\sqrt{7}} \approx -2.27$ et $\frac{6}{\sqrt{7}} \approx 2.27$; puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant en dehors de ses racines, on en déduit le tableau de signes ci-contre. Finalement, puisque l'inéquation qu'on cherche à résoudre est équivalente à l'inéquation $\frac{36-7x^2}{x^2+x-6} \geq 0$, son ensemble solution $\mathcal{S}$ est donc $\mathcal{S} = \left]-3\, , -\frac{6}{\sqrt{7}}\right] \cup \left]2\, , \frac{6}{\sqrt{7}}\right]$.

x	$-\infty$		-3		$-\frac{6}{\sqrt{7}}$		2		$\frac{6}{\sqrt{7}}$		$+\infty$
signe de $36 - 7x^2$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
signe de $x^2 + x - 6$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
signe de $\frac{36-7x^2}{x^2+x-6}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

2°) __dimensions possibles de rectangles de périmètre donné d'aire minorée__

c°) D'après l'énoncé, $2l + 2L = 14$, donc $l + L = 7$, donc $L = 7 - l$; l'aire $\mathcal{A}$ de ce rectangle vaut donc $\mathcal{A} = l \times L = l[7 - l]$.

d°) $\mathcal{A} \geq 10 \Leftrightarrow l[7 - l] \geq 10 \Leftrightarrow 7l - l^2 \geq 10 \Leftrightarrow l^2 - 7l + 10 \leq 0$, donc l est bien solution de l'inéquation $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ d'inconnu le nombre réel x.

e°) Il s'agit de déterminer le signe de $x^2 - 7x + 10$, trinôme de x ; on commence par rechercher d'éventuel(s) racine(s) de ce trinôme : $\Delta = [-7]^2 - 4 \times 1 \times 10 = 9 > 0$, donc ce trinôme a deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-[-7]-\sqrt{9}}{2\times 1} = \frac{7-3}{2} = 2$ et $x_+ = \frac{7+3}{2} = 5$. Puisqu'un trinôme est du signe de son coefficient dominant en dehors de ses racines, on en déduit que l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $x^2 - 7x + 10 \leq 0$ d'inconnu le nombre réel x est $\mathcal{S} = [2\,,5]$. Puisque $l = 7 - L$ avec $l \leq L$, les valeurs possibles de la largeur l sont celles de l'intervalle $[2\,,3.5]$ avec la longueur L à valeur dans l'intervalle $[3.5\,,5]$ où $L = 7 - l$.

3°) __lien entre signes des racines et signe de pente à l'origine de fonctions polynômes du deuxième degré__

f°) Le discriminant de f est $\Delta_f = b^2 - 4ac$; celui de g est $\Delta_g = [-b]^2 - 4ac = b^2 - 4ac = \Delta_f$; ces deux fonctions polynôme du deuxième degré f et g ayant même discriminant, puisque celui de f est positif, il en est donc de même pour celui de g.

g°) _ Première méthode : en utilisant les formules donnant les racines.

- Si $\Delta_f = 0$, alors f n'a qu'une seule racine, qui est réelle : $x_{S_f} = -\frac{b}{2a}$; il en est de même pour g, son unique racine, réelle, est $x_{S_g} = -\frac{-b}{2a} = -x_{S_f}$. L'opposée de la racine de f est ainsi bien racine de g.
- Si $\Delta_f > 0$, alors f a deux racines distinctes réelles : $x_{-_f} = \frac{-b-\sqrt{\Delta_f}}{2a}$ et $x_{+_f} = \frac{-b+\sqrt{\Delta_f}}{2a}$; il en est de même pour g, ses deux racines distinctes réelles sont $x_{-_g} = \frac{-[-b]-\sqrt{\Delta_g}}{2a} \overset{\Delta_f=\Delta_g}{=} -\frac{-b+\sqrt{\Delta_f}}{2a} = -x_{+_f}$ et $x_{+_g} = \frac{-[-b]+\sqrt{\Delta_g}}{2a} \overset{\Delta_f=\Delta_g}{=} -\frac{-b-\sqrt{\Delta_f}}{2a} = -x_{-_f}$. L'opposée de chacune des deux racines de f est ainsi bien racine de g.

_ Seconde méthode : directement avec la définition d'une racine. x est racine de f si, et seulement si, $ax^2 + bx + c = 0$ si, et seulement si, $a[-x]^2 - b[-x] + c = 0$ si, et seulement si, $-x$ est racine de g