détermination des dimensions de rectangles connaissant leurs aires et leurs périmètres

correction

a°) Tout points d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ a son abscisse x qui vérifie l'équation $f(x) = g(x)$ d'inconnu le nombre réel strictement positif x ; comme $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{4}{x} = 5 - x \overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} 4 = x[5 - x]$ $\Leftrightarrow 4 = 5x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$, cet abscisse x est donc racine de $x^2 - 5x + 4$, trinôme de x. Son discriminant Δ vaut $\Delta = [-5]^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9 > 0$, donc ce trinôme a deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-[-5]-\sqrt{9}}{2\times1} = \frac{5-3}{2} = 1$ et $x_+ = \frac{-[-5]+\sqrt{9}}{2\times1} = \frac{5+3}{2} = 4$. Ces deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont donc deux points d'intersection : l'un d'abscisse 1 et d'ordonnée $f(1) = \frac{4}{1} = 4(= g(1))$; l'autre d'abscisse 4 et d'ordonnée $f(4) = \frac{4}{4} = 1(= g(4))$.

b°) L'aire de ce rectangle étant de $4\ \mathrm{m}^2$, on en déduit que $L \times l = 4$, et donc, puisque $l \neq 0$, $L = \frac{4}{l} = f(l)$. Le périmètre de ce rectangle étant de $10\ \mathrm{m}$, on en déduit que $2l + 2L = 10$, donc que $L = 5 - l = g(l)$. La largeur l est donc solution de l'équation $f(x) = g(x)$ d'inconnu le nombre réel strictement positif x ; on prouve de la même manière que cela est aussi le cas pour la longueur L. On en déduit que, soit $l = 1$, auquel cas $L = 4$, soit $l = 4$, auquel cas $L = 1$, mais comme $l < L$, on en déduit alors que $l = 1$ et $L = 4$.

c°) Cette droite $\mathcal{D}$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 si, et seulement si, son point d'abscisse 2 appartient aussi à cette courbe $\mathcal{C}_f$ et cette droite $\mathcal{D}$ ne "touche" cette courbe $\mathcal{C}_f$ qu'en ce seul point. On en déduit que $a \times 2 + b = f(2) = \frac{4}{2} = 2$. L'équation $ax + b = f(x)$ d'inconnu le nombre réel non nul x doit donc n'avoir qu'une seule solution strictement positive ; puisque $ax + b = f(x) \Leftrightarrow ax + b = \frac{4}{x}$ $\overset{x \neq 0}{\Leftrightarrow} ax^2 + bx = 4 \Leftrightarrow ax^2 + bx - 4 = 0$, $ax^2 + bx - 4$, trinôme de x, n'a donc qu'une seule racine ; son discriminant est donc nul ; on a donc $\Delta = b^2 - 4a[-4] = 0$; on en déduit bien que $16a + b^2 = 0$.

d°) De $16a + b^2 = 0$, on en tire que $a = -\frac{b^2}{16}$, ce qui donne, reportant dans $2a + b = 2$, $2\left[-\frac{b^2}{16}\right] + b = 2$, donc $b^2 - 8b + 16 = 0$; b est donc racine de $X^2 - 8X + 16$, trinôme de X ; le discriminant Δ de ce trinôme vaut $\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 16 = 64 - 64 = 0$; ce trinôme n'a donc qu'une seule racine réelle : $X_S = -\frac{-8}{2\times1} = 4$. On en déduit donc que $b = 4$ et que $a = -\frac{b^2}{16} = -1$. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a donc pour équation $y = -x + 4$. Toute relation s'écrivant $y = -x + \frac{p}{2}$ est la relation vérifiée par les dimensions d'un rectangle de périmètre p ; il s'agit de l'équation réduite d'une droite d'ordonnée à l'origine la moitié du périmètre $\frac{p}{2}$ et de coefficient directeur -1 ; parmi toutes les droites admettant $y = -x + \frac{p}{2}$ pour équation réduite, pour p assez "élevé", il y a deux points d'intersection avec la courbe $\mathcal{C}_f$, ce qui correspond à un rectangle qui n'est pas un carré, mais, pour une valeur de p, il n'y a qu'un seul point d'intersection avec la courbe $\mathcal{C}_f$ qui correspond au rectangle d'aire donnée de périmètre minimal : l'abscisse de ce point d'intersection étant bien égal à son ordonnée, il s'agit bien d'un carré.