correction d'exercice

On considère les deux fonctions polynôme du deuxième degré f et g définies sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante.

$$f\,:\,x \longmapsto 5x^2+18x+15 \qquad \text{et} \qquad g\,:\,x \longmapsto x^2+6x+10$$

a°) $x^2+6x+10$, trinôme de x, n'a pas de racines réelles ; en effet, son discriminant Δ est strictement négatif : $\Delta = 6^2-4\times 1\times 10 = 36-40 = -4 < 0$. Cette fonction polynôme de deuxième degré est donc toujours du signe de son coefficient dominant tout en ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$.

b°) Puisque, $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$, le signe de $h(x)$ est donc strictement celui de $f(x)$; il s'agit donc de connaître le signe de $f(x)$ en fonction de x. $5x^2+18x+15$, trinôme de x, a deux racines distinctes réelles ; en effet, son discriminant Δ est strictement positif : $\Delta = 18^2-4\times 5\times 15 = 24 > 0$; ce dernier trinôme a donc deux racines distinctes réelles : $x_- = \frac{-18-\sqrt{24}}{2\times 5} = \frac{-\cancel{2}\times 9-\cancel{2}\sqrt{6}}{(\cancel{2}\times 5)} = \frac{-9-\sqrt{6}}{5}$ et $x_+ = \frac{-9+\sqrt{6}}{5}$. Comme un trinôme est du signe de son coefficient dominant en "dehors" de ses racines, on en déduit que $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\,,\frac{-9-\sqrt{6}}{5}\right] \cup \left[\frac{-9+\sqrt{6}}{5}\,,+\infty\right[$. Comme, $\forall x \in \mathbb{R}$, le signe de $h(x)$ est strictement celui de $f(x)$, on en déduit que l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $h(x) \geq 0$ d'inconnu le nombre réel x est

$$\mathcal{S} = \left]-\infty\,,\frac{-9-\sqrt{6}}{5}\right] \cup \left[\frac{-9+\sqrt{6}}{5}\,,+\infty\right[$$

Puisque $h(x) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} \geq 0 \overset{\forall x\in\mathbb{R}, g(x)>0}{\Longleftrightarrow} f(x)-g(x) \geq 0$ et que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)-g(x) = 5x^2+18x+15-[x^2+6x+10] = 4x^2+12x+5$, l'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $h(x) \geq 1$ d'inconnu le nombre réel x est donc l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $4x^2+12x+5$, trinôme de x, est positif. On détermine donc le signe de $4x^2+12x+5$ en fonction de x ; on commence déjà par déterminer les éventuelles racines de ce trinôme. Puisque son discriminant Δ est strictement positif (on a, en effet, $\Delta = 12^2-4\times 4\times 5 = 64 > 0$), ce dernier trinôme a donc deux racines distinctes réelles $x_- = \frac{-12-\sqrt{64}}{2\times 4} = \frac{-12-8}{8} = -2.5$ et $x_+ = \frac{-12+8}{8} = -0.5$. Comme un trinôme est du signe de son coefficient dominant en "dehors" de ses racines, on en déduit que $f(x)-g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,,-2.5] \cup [-0.5\,,+\infty[$. L'ensemble solution $\mathcal{S}$ de l'inéquation $h(x) \geq 1$ d'inconnu le nombre réel x est donc $\mathcal{S} =]-\infty\,,-2.5] \cup [-0.5\,,+\infty[$.