bande passante de circuit électrique — correction

a°) $f(x)^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+Q^2\left[x-\frac{1}{x}\right]^2} \geq \frac{1}{2} \xLeftrightarrow[\text{strictement décroissante sur }]0\,,+\infty[]{\text{la fonction inverse } X\mapsto\frac{1}{X} \text{ est}} 1 + Q^2\left[x-\frac{1}{x}\right]^2 \leq 2 \Leftrightarrow Q^2\left[x-\frac{1}{x}\right]^2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow \left[Q\left[x-\frac{1}{x}\right]\right]^2 - 1^2 \leq 0 \xLeftrightarrow{\text{troisième identité remarquable}} \left[Q\left[x-\frac{1}{x}\right]-1\right]\left[Q\left[x-\frac{1}{x}\right]+1\right] \leq 0$$

$$\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{Q}{x}\left[x^2-1-\frac{x}{Q}\right]\frac{Q}{x}\left[x^2-1+\frac{x}{Q}\right] \leq 0 \xLeftrightarrow{x^2>0<Q^2} \left[x^2-\frac{x}{Q}-1\right]\left[x^2+\frac{x}{Q}-1\right] \leq 0$$

b°) On résout donc l'inéquation $\left[x^2-\frac{x}{Q}-1\right]\left[x^2+\frac{x}{Q}-1\right] \leq 0$ d'inconnu le nombre réel strictement positif x ; on commence pour cela à construire le tableau de signe de $\left[x^2-\frac{x}{Q}-1\right]\left[x^2+\frac{x}{Q}-1\right]$ vue comme expression du nombre réel x.

- signe de $x^2-\frac{x}{Q}-1$, trinôme de x : le discriminant Δ de ce trinôme vaut $\Delta = \left[-\frac{1}{Q}\right]^2 - 4\times 1\times[-1]$ $= \frac{1}{Q^2}+4 = \frac{1+4Q^2}{Q^2} > 0$, donc ce trinôme a deux racines distinctes réelles : $x_1 = \frac{-\left[-\frac{1}{Q}\right]-\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{\frac{1}{Q}-\frac{\sqrt{1+4Q^2}}{Q}}{2}$ $= \frac{1-\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} < 0$ puisque $\sqrt{1+4Q^2} > 1$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} > 0$. Ce trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty\,, x_1[\,\cup\,]x_2\,,+\infty[$ et est strictement négatif sur $]x_1\,,x_2[$.
- signe de $x^2+\frac{x}{Q}-1$, trinôme de x : le discriminant de ce trinôme est égal à celui du trinôme précédent ; en effet, $\left[\frac{1}{Q}\right]^2 - 4\times 1\times[-1] = \frac{1}{Q^2}+4 = \Delta > 0$, donc ce trinôme a deux racines distinctes réelles : $x_3 = \frac{-\left[\frac{1}{Q}\right]-\sqrt{\Delta}}{2\times 1} = \frac{-\frac{1}{Q}-\frac{\sqrt{1+4Q^2}}{Q}}{2} = \frac{-1-\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} < 0$ et $x_4 = \frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} > 0$ puisque $\sqrt{1+4Q^2} > 1$.
  Ce trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty\,,x_3[\,\cup\,]x_4\,,+\infty[$ et est strictement négatif sur $]x_3\,,x_4[$.

On construit donc le tableau de signes de l'expression de x suivante : $\left[x^2-\frac{x}{Q}-1\right]\left[x^2+\frac{x}{Q}-1\right]$.

x	$-\infty$		x_3		x_1		x_4		x_2		$+\infty$
signe de $x^2-\frac{x}{Q}-1$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
signe de $x^2+\frac{x}{Q}-1$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
signe de $\left[x^2-\frac{x}{Q}-1\right]\left[x^2+\frac{x}{Q}-1\right]$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

La bande passante $\mathcal{S}$, ensemble solution de l'inéquation $\left[x^2-\frac{x}{Q}-1\right]\left[x^2+\frac{x}{Q}-1\right] \leq 0$ d'inconnu le nombre réel **strictement positif** x, est donc $\mathcal{S} = [x_4\,,x_2] = \left[\frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\,,\frac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}\right]$.

c°) La largeur de la bande passante est la “longueur” de l'intervalle $[x_4\,,x_2]$, ce qui vaut bien $x_2 - x_4 = \frac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} - \frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} = \frac{1+\sqrt{1+4Q^2}-\left[-1+\sqrt{1+4Q^2}\right]}{2Q} = \frac{1+\cancel{\sqrt{1+4Q^2}}+1-\cancel{\sqrt{1+4Q^2}}}{2Q} = \frac{2}{2Q} = \frac{1}{Q}$.