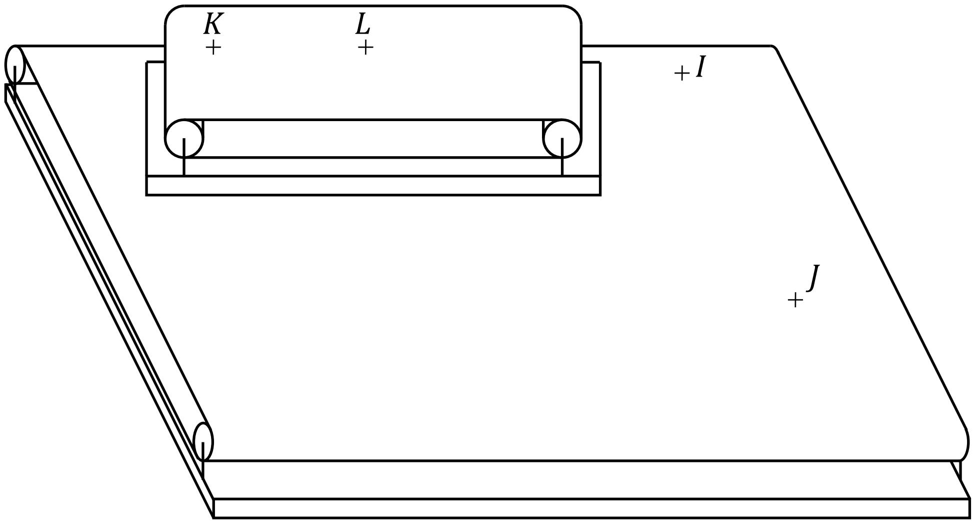
le bonbon, le but et les tapis roulants

objectif : définir une somme de vecteurs

1°) approche

On place le premier tapis roulant décrit lors de la précédente séance sur un second tapis roulant ; cette situation est représentée ci-après. Si on place le bonbon au point K avant que ce premier tapis roulant ait tourné, ce dernier se retrouve alors au point L après que ce tapis roulant a tourné. Si on place le bonbon au point I avant que ce second tapis roulant ait tourné, ce dernier se retrouve alors au point J après que ce tapis roulant a tourné.



e°) Déterminer le plus précisément possible le point M où se retrouve ce bonbon après que les deux tapis roulants ont tourné s'il avait été placé au point K avant que ces deux tapis roulant aient tourné.

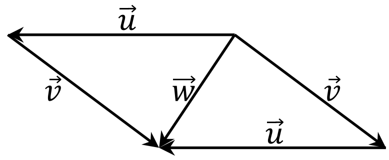
2°) cours

déf. : Se donnant deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on représente le vecteur $\vec{u}$ par une première flèche et le vecteur $\vec{v}$ par une seconde flèche telle que son origine **coïncide** avec l'extrémité de la première flèche représentant le vecteur $\vec{u}$; la **somme** de ces deux vecteurs $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ est représentée par une flèche d'origine cette première flèche et d'extrémité cette seconde flèche.

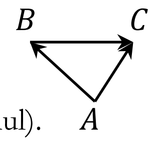
ex. : En section 1°, on a $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{IJ}$.

théo. : **Le résultat d'une somme de vecteurs ne dépend pas de l'ordre de ses termes.**

preuve : Changer l'ordre des vecteurs ajoutés $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne fait que changer la succession des flèches les représentant, le quadrilatère formé admet ainsi chacune de ses paires de côtés en vis-à-vis parallèles et de même longueur ; il s'agit donc d'un parallélogramme. Partant d'un même point, mettre bout-à-bout les flèches représentant deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ "mène" ainsi au sommet opposé dans ce parallélogramme, et ce quelque soit l'ordre des flèches "suivies" ; la somme des deux vecteurs est ainsi représentée par une même flèche quel que soit l'ordre des vecteurs considérés dans cette somme, ce qui prouve le théorème.



$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$



théo. : (relation de Chasles) Quels que soient les points A, B et C, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

déf. : L'**opposé** d'un vecteur $\vec{v}$, noté $-\vec{v}$, est le vecteur tel que $v + [-\vec{v}] = \vec{0}$ ($\vec{0}$ désigne le vecteur nul).

théo. : Le vecteur $-\vec{v}$ est de même direction et de même longueur que le vecteur $\vec{v}$, mais en est de sens **opposé**.

ex. : Étant donnés A et B deux points quelconques du plan, l'opposé d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ (on échange le point d'origine avec le point d'extrémité).

déf. : Soustraire un vecteur à un autre, c'est ajouter son opposé : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + [-\vec{v}]$.

ex. : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \left[-\overrightarrow{BC}\right] = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}$.

rq. : Ces deux précédents théorèmes sont admis.