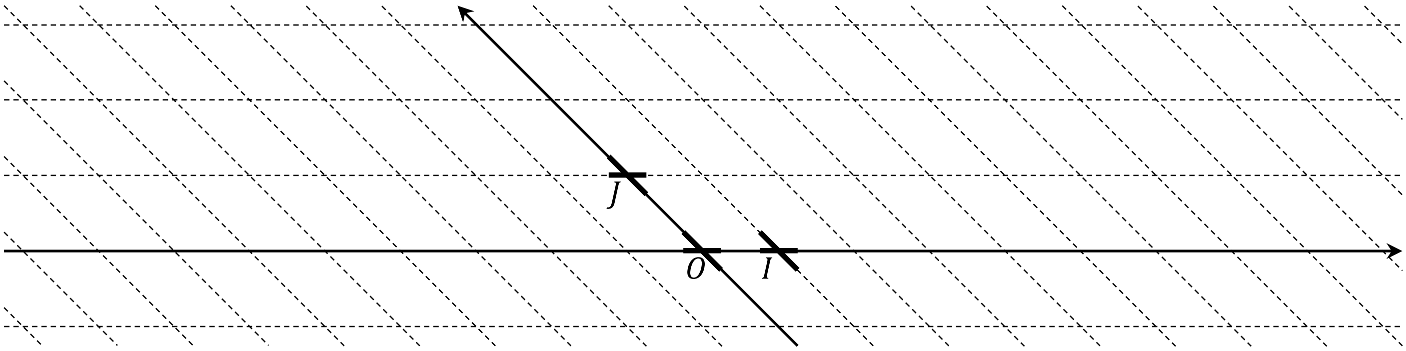
coordonnées de somme de vecteurs

objectif : le plan étant muni d'un repère, définir les coordonnées dans ce repère d'une somme de vecteurs

1°) approche

Le plan est repéré par le repère $(O\ ;\ I\ ,J)$ comme représenté ci-dessous.



On considère les point P et Q de coordonnées dans ce repère $(10\ ,3)$ et $(-8\ ,1)$, respectivement.

On note $\vec{\imath}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath}$ le vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

a°) Exprimer chacun des deux vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ en fonction des deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ seulement.

b°) Placer les points P et Q dans le schéma ci-dessus.

c°) Prouver que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$.

d°) En déduire une expression du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ en fonction des deux vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ seulement.

e°) En déduire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ dans ce repère $(O\ ;\ I\ ,J)$ du plan.

2°) cours

théo. : Le plan étant muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ,J)$, notant $(x_{\vec{u}}\ ,y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}\ ,y_{\vec{v}})$ les coordonnées respectives dans ce même repère de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les coordonnées toujours dans ce même repère du vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ sont $\boxed{(x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}\ ,y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}})}$, c'est-à-dire que, notant $(x_{\vec{w}}\ ,y_{\vec{w}})$ les coordonnées de ce vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ toujours dans ce même repère du plan, on a $x_{\vec{w}} = x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}$ et $y_{\vec{w}} = y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}$.

preuve : Notant $(x_{\vec{u}}\ ,y_{\vec{u}})$ et $(x_{\vec{v}}\ ,y_{\vec{v}})$ les coordonnées dans un même repère du plan $(O\ ;\ I\ ,J)$ de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notant $\vec{\imath}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath}$ le vecteur $\overrightarrow{OJ}$, on a donc $\vec{u} = x_{\vec{u}}\vec{\imath} + y_{\vec{u}}\vec{\jmath}$ et $\vec{v} = x_{\vec{v}}\vec{\imath} + y_{\vec{v}}\vec{\jmath}$, donc $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = x_{\vec{u}}\vec{\imath} + y_{\vec{u}}\vec{\jmath} + x_{\vec{v}}\vec{\imath} + y_{\vec{v}}\vec{\jmath} = x_{\vec{u}}\vec{\imath} + x_{\vec{v}}\vec{\imath} + y_{\vec{u}}\vec{\jmath} + y_{\vec{v}}\vec{\jmath} = [x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}]\vec{\imath} + [y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}}]\vec{\jmath}$ donc les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ dans ce même repère du plan $(O\ ;\ I\ ,J)$ sont bien $(x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}}\ ,y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}})$.

théo. : Le plan étant muni d'un repère $(O\ ;\ I\ ,J)$, considérant deux points P et Q de coordonnées dans ce repère respectivement $(x_P\ ; y_P)$ et $(x_Q\ ; y_Q)$, les coordonnées dans ce même repère du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ sont $\boxed{(x_Q - x_P\ ,y_Q - y_P)}$, c'est-à-dire que, notant $(x_{\overrightarrow{PQ}}\ ,y_{\overrightarrow{PQ}})$ les coordonnées toujours dans ce même repère de ce vecteur $\overrightarrow{PQ}$, on a $x_{\overrightarrow{PQ}} = x_{\vec{Q}} - x_{\vec{P}}$ et $y_{\overrightarrow{PQ}} = y_{\vec{Q}} - y_{\vec{P}}$.

preuve : Le plan étant muni d'un repère $(O\ ; I\ ,J)$, notant $(x_P\ ,y_P)$ les coordonnées d'un point P, les coordonnées dans ce même repère du vecteur $\overrightarrow{OP}$ sont aussi $(x_P\ ,y_P)$; de la même manière, notant $(x_Q\ ,y_Q)$ les coordonnées d'un point Q dans ce même repère, les coordonnées dans ce même repère du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ sont $(x_Q\ ,y_Q)$. Notant $\vec{\imath}$ le vecteur $\overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath}$ le vecteur $\overrightarrow{OJ}$, on a donc $\overrightarrow{OP} = x_P\vec{\imath} + y_P\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{OQ} = x_Q\vec{\imath} + y_Q\vec{\jmath}$, donc $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = x_Q\vec{\imath} + y_Q\vec{\jmath} - [x_P\vec{\imath} + y_P\vec{\jmath}] = x_Q\vec{\imath} + y_Q\vec{\jmath} - x_P\vec{\imath} - y_P\vec{\jmath}$ $= x_Q\vec{\imath} - x_P\vec{\imath} + y_Q\vec{\jmath} - y_P\vec{\jmath} = [x_Q - x_P]\vec{\imath} + [y_Q - y_P]\vec{\jmath}$; les coordonnées dans ce même repère du vecteur $\overrightarrow{PQ}$ sont ainsi bien $(x_Q - x_P\ ; y_Q - y_P)$.