repérage et coordonnées barycentriques

On considère trois points distincts non alignés A, B et C du plan qu'on muni donc du repère $(A\,;\ B\,,C)$.
On considère en outre le point M milieu du segment $[BC]$, le point G centre de gravité du triangle ABC, ainsi que les deux points P et Q du plan vérifiant $2\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{CP}$ et $2\overrightarrow{AQ}-4\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{BC}$.
On admet que $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

a°) Justifier que le triplet de points $(A\,;\ B\,,C)$ constitue bien un repère du plan.

b°) Faire un schéma à compléter tout le long de l'étude.

1°) <u>milieu d'un segment</u>

c°) Prouver que $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; en déduire les coordonnées du point M dans le repère $(A\,;\ B\,,C)$.

d°) On admet qu'il existe un unique triplet de nombres réels $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ tel que les égalités suivantes soient vérifiées : $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $\alpha\overrightarrow{AM}+\beta\overrightarrow{BM}+\gamma\overrightarrow{CM}=\vec{0}$; expliciter ce triplet de trois nombres réels $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$.

2°) <u>centre de gravité</u>

e°) Déterminer les coordonnées du point G dans le repère $(A\,;\ B\,,C)$.

f°) On admet qu'il existe un unique triplet de nombres réels $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ tel que les égalités suivantes soient vérifiées : $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}+\gamma\overrightarrow{CG}=\vec{0}$; expliciter ce triplet de trois nombres réels $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$.

3°) <u>le point *P*</u>

g°) Déterminer les coordonnées du point P dans le repère $(A\,;\ B\,,C)$.

h°) On admet qu'il existe un unique triplet de nombres réels $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ tel que les égalités suivantes soient vérifiées : $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $\alpha\overrightarrow{AP}+\beta\overrightarrow{BP}+\gamma\overrightarrow{CP}=\vec{0}$; expliciter ce triplet de trois nombres réels $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$.

4°) <u>le point *Q*</u>

i°) Prouver que $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{AM}$.

j°) Déterminer les coordonnées du point Q dans le repère $(A\,;\ B\,,C)$.

k°) On admet qu'il existe un unique triplet de nombres réels $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$ tel que les égalités suivantes soient vérifiées : $\alpha+\beta+\gamma=1$ et $\alpha\overrightarrow{AQ}+\beta\overrightarrow{BQ}+\gamma\overrightarrow{CQ}=\vec{0}$; expliciter ce triplet de trois nombres réels $(\alpha\,,\beta\,,\gamma)$.

5°) <u>un problème d'alignement</u>

l°) Prouver que les trois points du plan B, P et Q sont alignés.