exposants fractionnaires

correction

a°) $\left[7^{\frac{1}{2}}\right]^2 = 7^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}} \overset{7>0}{=} 7^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 7^1 = 7$; $7^{\frac{1}{2}}$ est doinc une solution de l'équation $x^2 = 7$ d'inconnu le nombre réel x. Cette dernière équation n'admettant qu'une unique solution positive, admettant que $7^{\frac{1}{2}}$ est positif, on en déduit que, nécessairement, $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$.

b°) On rappelle ci-après la définition d'une suite géométrique.

déf. : Une suite g est **géométrique** lorsque il existe un nombre q, appelée sa **raison**, telle que, pour tout nombre entier n tel que g_n et g_{n+1} existent bien, on a $g_{n+1} = g_n \times q$.

On rappelle ci-après le théorème donnant la forme explicite des suites géométriques.

théo. : On considère une suite g définie sur $\mathbb{N}$; g_0 est ainsi le premier terme de cette suite g. Cette suite g est géométrique de raison égale à q si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, g_n = g_0 \times q^n$.

c°) Notant n le rang de ce terme égal à 15de cette suite géométrique, qu'on note g, on andonc $g_n = 15$. Le terme suivant ce dernier terme est donc celui de rang $n+1$; puisque ce terme de range $n+1$ est éqal à 180, on a donc $g_{n+1} = 180$. Or, d'après la définition d'une suite géométrique, notant q sa raison, on doit aussi vérifier l'égalité suivante : $g_{n+1} = g_n \times q$; on en déduit que $180 = 15 \times q$, donc $q = \frac{180}{15} = 12$. La raison de cette suite géométrique vaut donc 12.

d°) Puisque cette suite g est géométrique, on a donc $g_3 = g_2 \times q$ et $g_2 = g_1 \times q$, donc $g_3 = g_1 \times q \times q$, donc $g_3 = g_1 \times q^2$, donc $54 = 6 \times q^2$, donc $q^2 = \frac{54}{6} = 9$. Comme on suppose que q est un nombre réel positif, on en déduit que $q = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$. Puisque $g_1 = g_0 \times q$, on en déduit que $6 = g_0 \times 3$, donc le premier terme de cette suite g vaut $g_0 = \frac{6}{3} = 2$.

e°) On obtient, de la même manière qu'en section d°, la relation suivante : $g_5 = g_1 \times q^4$; on en déduit que $9375 = 15 \times q^4$, donc $q^4 = \frac{9375}{15} = 625$. Puisque q est un nombre réel positif, on en déduit que $q = 625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$. Puisque $g_1 = g_0 \times q$, on en déduit que $15 = g_0 \times 5$, donc le premier terme de cette suite g vaut $g_0 = \frac{15}{5} = 3$.