une suite arithmético-géométrique — correction

a°) Par définition, le premier terme de la suite s est $s_0 = 3000$. Les intérêts de 0.8% sde ce compte s'élèvent ainsi à $\frac{0.8}{100} \times 3000 = 0.8 \times \frac{30\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 0.8 \times 30 = 8 \times 3 = 24$ euros ; après versement de ces intérêts, le montant sur ce compte est donc de 3024 €. Retirant ensuite 20 €, il reste donc 3004 € sur ce compte en début d'année 2019 ; on a donc $s_1 = 3004$. De même, $s_2 = 3004 + \frac{0.8}{100} \times 3004 - 20 = 3008.032$. Puisque, par définition, $g_0 = s_0 - 2500$, $g_1 = s_1 - 2500$ et $g_2 = s_2 - 2500$, les trois premiers termes de la suite g valent donc $g_0 = 500$, $g_1 = 504$ et $g_2 = 508.032$.

b°) s_{n+1} est, par définition, le montant en euros sur ce compte après versement des intérêts versés en début d'année $2018 + n + 1$ puis retrait de 20 € ; s_{n+1} s'obtient donc à partir de s_n, montant en euros sur ce compte après versement des intérêts versés en début d'année $2018 + n$ et retrait de 20 €, en majorant s_n de 0.8%, ce qui se traduit par une multiplication par 1.008 (il s'agit du coefficient multiplicateur traduisant l'augmentation de 0.8% ; en effet, additionnant 0.8% de s_n à s_n, on obtient $s_n + \frac{0.8}{100} s_n = s_n \times 1 + s_n \times 0.008 = s_n \times [1 + 0.008] = s\_n \times 1.008$) puis en retranchant 20 à ce dernier produit. On a donc bien pour tout nombre entier naturel n, $s_{n+1} = 1.008 \times s_n - 20$.

c°) Il s'agit de prouver que la suite g vérifie la définition d'une suite géométrique ; on prouve donc qu'il existe un nombre réel fixé, qu'on note q, tel que, pour tout nombre entier naturel n, $g_{n+1} = g_n \times q$; on exprime donc, pour tout nombre entier naturel n, g_{n+1} en fonction de g_n : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$g_{n+1} = s_{n+1} - 2500 = 1.008 \times s_n - 20 - 2500 = 1.008 \times [g_n + 2500] - 2520$$

$= 1.008 g_n + 2500 \times 1.008 - 2520 = 1.008 g_n + 2520 - 2520 = q \times g_n$ avec $q = 1.008$; cette suite g est donc bien géométrique de raison $q = 1.008$ et de premier terme $g_0 = 500$.

d°) g est une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison strictement supérieure à 1 ; elle est donc strictement croissante.

e°) On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}, g_n = g_0 \times q^n = 500 \times 1.008^n$ et $s_n = g_n + 2500 = 500 \times 1.008^n + 5 \times 500 = 500[5 + 1.008^n]$; ces deux derniers résultats peuvent être confirmés en vérifiant qu'on retrouve bien les valeurs déterminées en section a° des trois premiers termes de chacune de ces deux suites g et s.

$$g_0 = 500 \times 1.008^0 = 500 \times 1 = 500,$$
$$g_1 = 500 \times 1.008^1 = 500 \times 1.008 = 504,$$
$$g_2 = 500 \times 1.008^2 = 500 \times 1.016064 = 508.032,$$
$$s_0 = 500[5 + 1.008^0] = 500[5 + 1] = 500 \times 6 = 3000,$$
$$s_1 = 500[5 + 1.008^1] = 500[5 + 1.008] = 500 \times 6.008 = 3004$$

et $s_2 = 500[5 + 1.008^2] = 500[5 + 1.016064] = 500 \times 6.016064 = 3008.32$